ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 1$^{\eta}$ ΔΕΚΑΔΑ

1.

Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

α) $\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{6}:\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\right)$

β) $8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+(-9)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-2}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{6}:\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{8}{6}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{10}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{32}{12}-\frac{5}{12}\right)=$$

$$=\frac{13}{6}:\left(-\frac{7}{4}\right)+\frac{5}{7}\cdot\frac{27}{12}=$$

$$=\frac{13}{6}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)+\frac{5}{7}\cdot\frac{27}{12}=$$

$$=-\frac{26}{21}+\frac{45}{28}=-\frac{104}{84}+\frac{135}{84}=\frac{31}{84}$$

β)

$$8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+(-9)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-2}=8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)^{4}\cdot\left(\frac{3}{1}\right)^{3}\cdot\left(\frac{27}{1}\right)^{2}=$$

$$=8\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)+\frac{1}{9^4}\cdot 3^3\cdot 27^2=$$

$$=-27+\frac{1}{(3^2)^4}\cdot 3^3\cdot(3^3)^2=$$

$$=-27+\frac{1}{3^8}\cdot 3^3\cdot 3^6=$$

$$=-27+\frac{3^9}{3^8}=-27+3=-24$$

2.

Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

α) $A = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} - \left(-\frac{x}{3}\right)^{x} + (5+x)\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1} + (2-x)^{x+2}$ αν $x=-2$

β) $B = 5\sqrt{\sqrt{64}} - 2\sqrt{\sqrt{4}} + 7\sqrt{3\sqrt{36}}$

γ) $\Gamma = 2\sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{1-\frac{1}{5}}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = \left(\frac{1}{-2}\right)^{-(-2)} - \left(-\frac{-2}{3}\right)^{-2} + [5+(-2)]\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1} + [2-(-2)]^{-2+2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(+\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 4^{0} =$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right)^{1} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{18}{4} + \frac{4}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

β)

$$B = 5\sqrt{\sqrt{64}} - 2\sqrt{\sqrt{4}} + 7\sqrt{3\sqrt{36}} = 5\sqrt{8} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{3\cdot 6} =$$

$$= 5\sqrt{2\cdot 4} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{9\cdot 2} =$$

$$= 5\cdot 2\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\cdot 3\cdot\sqrt{2} =$$

$$= 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 29\sqrt{2}$$

γ)

$$\Gamma = 2\sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{1-\frac{1}{5}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{\frac{4}{5}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

3.

Να γράψετε με μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις

$A = 3^{2014} + 3^{2014} + 3^{2014}$

$B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$

$\Gamma = 2^{59} - 4^{29}$

$\Delta = 2^{17}\cdot 3^{18} - 2^{18}\cdot 3^{17}$

Προτεινόμενη λύση

$A = 3^{2014} + 3^{2014} + 3^{2014} = 3\cdot 3^{2014} = 3^{2015}$

$B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100} = 2^{100}(2^{2} - 2 - 1) = 2^{100}(4-2-1) = 2^{100}$

$\Gamma = 2^{59} - 4^{29} = 2^{59} - (2^{2})^{29} = 2^{59} - 2^{58} = 2^{58}(2-1) = 2^{58}$

$\Delta = 2^{17}\cdot 3^{18} - 2^{18}\cdot 3^{17} = 2^{17}\cdot 3^{17}(3-2) = 2^{17}\cdot 3^{17} = (2\cdot 3)^{17} = 6^{17}$

4.

Να βρείτε το x στις παρακάτω περιπτώσεις

α) $5^7 : 5^x = 125$ **β)** $(-2)^{2x} = 64$ **γ)** $7^{2x} \cdot 7^{2x+1} = \dfrac{1}{49}$

δ) $6^x \cdot 6^{x-4} = 1$ **ε)** $2^{x+1} \cdot 4^{3x+2} = 16$ **στ)** $(-2)^{\nu} x = 2^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$5^7 : 5^x = 125$ άρα $5^{7-x} = 5^3$ οπότε $7 - x = 3$ επομένως $x = 4$

β)

$(-2)^{2x} = 64$ άρα $[(-2)^2]^x = 4^3$ οπότε $4^x = 4^3$ επομένως $x = 3$

γ)

$7^{2x} \cdot 7^{2x+1} = \dfrac{1}{49}$ άρα $7^{4x+1} = \dfrac{1}{7^2} = 7^{-2}$ οπότε $4x + 1 = -2$ επομένως $x = -\dfrac{3}{4}$

δ)

$6^x \cdot 6^{x-4} = 1$ άρα $6^{2x-4} = 6^0$ οπότε $2x - 4 = 0$ επομένως $x = 2$

ε)

$2^{x+1} \cdot 4^{3x+2} = 16$ άρα $2^{x+1} \cdot (2^2)^{3x+2} = 2^4$

$2^{x+1} \cdot 2^{6x+4} = 2^4$

$2^{7x+5} = 2^4$

$7x + 5 = 4$ δηλαδή $x = -\dfrac{1}{7}$

στ)

- Όταν ν άρτιος, η εξίσωση γίνεται $2^{\nu} x = 2^{\nu+1}$ άρα $x = 2^{\nu+1} : 2^{\nu} = 2$
- Όταν ν περιττός, η εξίσωση γίνεται $-2^{\nu} x = 2^{\nu+1}$ άρα $x = -2^{\nu+1} : 2^{\nu} = -2$

5.

Έστω η συνάρτηση $y = x^2 + \alpha x - 8$

α) Αν μία ρίζα της εξίσωσης $y = 0$ είναι το 2, να βρείτε την τιμή του α και την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

β) Για $\alpha = 2$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, καθώς επίσης και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού το 2 είναι ρίζα ισχύει $0 = 2^2 + 2\alpha - 8$ άρα $2\alpha - 4 = 0$ απ' όπου $\alpha = 2$
για α =2 η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 8 = 0$ εύκολα βρίσκουμε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = -4$

β)

Για $\alpha = 2$ η συνάρτηση γίνεται $y = x^2 + 2x - 8$.
Η τιμή του x για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή είναι η

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2} = -1$$

και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{4+32}{4} = -9$

6.

α) Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{2x}{3x-9}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{3x-x^2}$

β) Να προσδιορίσετε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το πηλίκο του $1^{ου}$ με τον $2^{ο}$ αυξημένο κατά το πηλίκο του $2^{ου}$ με τον $3^{ο}$ να είναι ίσο με $\dfrac{7}{6}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\dfrac{2x}{3x-9}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{3x-x^2}$ άρα $\dfrac{2x}{3(x-3)}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x(3-x)}$

$$\dfrac{2x}{3(x-3)}+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{x(x-3)}$$

Ε.Κ. Π παρονομαστών $= 3x(x-3)\neq 0$. Περιορισμοί $x\neq 0$ και $x\neq 3$

$$3x(x-3)\dfrac{2x}{3(x-3)}+3x(x-3)\dfrac{1}{x}=-3x(x-3)\dfrac{3}{x(x-3)}$$

$$2x^2+3(x-3)=-9$$

$$2x^2+3x-9=-9$$

$$2x^2+3x=0$$

$x(2x+3)=0$ επομένως $x=0$ ή $x=-\dfrac{3}{2}$

Η $x=0$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

β)

Αν x είναι ο μικρότερος ακέραιος, τότε οι επόμενοι είναι οι $x+1$ και $x+2$.

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε την εξίσωση $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{7}{6}$

ΕΚΠ παρονομαστών $=6(x+1)(x+2)\neq 0$ άρα $x+1\neq 0$ και $x+2\neq 0$

δηλαδή $x\neq -1$ και $x\neq -2$

Η εξίσωση γίνεται $6(x+1)(x+2)\dfrac{x}{x+1}+6(x+1)(x+2)\dfrac{x+1}{x+2}=6(x+1)(x+2)\dfrac{7}{6}$

$$6x(x+2)+6(x+1)^2=7(x+1)(x+2)$$

$$6x^2+12x+6(x^2+2x+1)=7(x^2+2x+x+2)$$

$$6x^2+12x+6x^2+12x+6=7x^2+14x+7x+14$$

$5x^2+3x-8=0$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=169$ και ρίζες

$$x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-3+13}{10}=1$$

$x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-3-13}{10}=-\dfrac{8}{5}$ η οποία απορρίπτεται διότι δεν είναι ακέραιος αριθμός

Συνεπώς $x=1$ και επομένως οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι 1 , 2 , 3

7.

Οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa + 2)x + (\lambda - 1)y = 26$ και $\varepsilon_2 : (\kappa + 4)x - \lambda y = 6$ τέμνονται στο σημείο (2 , 4).

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ.

β) Για $\kappa = 6$ και $\lambda = \frac{7}{2}$, να βρείτε τα σημεία τομής κάθε ευθείας με τους άξονες και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση των δύο ευθειών

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού το (2, 4) είναι κοινό σημείο των δύο ευθειών, έχουμε

$(\kappa + 2)\cdot 2 + (\lambda - 1)\cdot 4 = 26$ και $(\kappa + 4)\cdot 2 - \lambda\cdot 4 = 6$

$2\kappa + 4 + 4\lambda - 4 = 26$ και $2\kappa + 8 - 4\lambda = 6$

$2\kappa + 4\lambda = 26$ και $2\kappa - 4\lambda = -2$

$\kappa + 2\lambda = 13$ και $\kappa - 2\lambda = -1$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $2\kappa = 12$ άρα $\kappa = 6$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε $4\lambda = 14$ άρα $\lambda = \frac{7}{2}$

β)

Για $\kappa = 6$ και $\lambda = \frac{7}{2}$ οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται

$8x + \left(\frac{7}{2} - 1\right)y = 26$ και $10x - \frac{7}{2}y = 6$

$8x + \frac{5}{2}y = 26$ και $10x - \frac{7}{2}y = 6$

$16x + 5y = 52$ και $20x - 7y = 12$

Για την ε_1: $16x + 5y = 52$.

Όταν $x = 0$ έχουμε $y = \frac{52}{5}$ οπότε η τομή με τον άξονα των y είναι το $\left(0, \frac{52}{5}\right)$

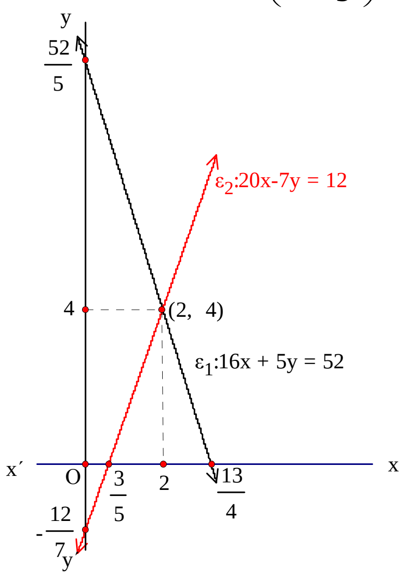
Όταν $y = 0$ έχουμε $x = \frac{13}{4}$ οπότε το σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το $\left(\frac{13}{4}, 0\right)$

Για την ε_2: $20x - 7y = 12$

Όταν $x = 0$ έχουμε $y = -\frac{12}{7}$ οπότε το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το $\left(0, -\frac{12}{7}\right)$

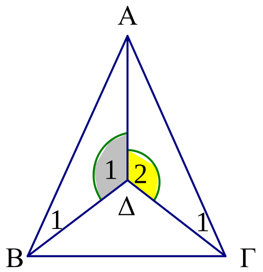
Όταν $y = 0$ έχουμε $x = \frac{3}{5}$ οπότε το σημείο τομής με τομής με τον άξονα των x είναι το $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα



8.

Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται το σημείο Δ τέτοιο ώστε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και ΒΔ = ΔΓ.



α) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

γ) Το σημείο Δ ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ

Προτεινόμενη λύση

α)

$\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ διότι $(B\Delta = \Delta\Gamma, \quad \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2, \quad \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1)$ $(\Gamma - \Pi - \Gamma)$

Οπότε ΑΒ = ΑΓ, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

β)

Αφού $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ είναι και $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$

γ)

Αφού το Δ είναι σημείο της διχοτόμου ΑΔ της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή από τις ΑΒ και ΑΓ

9.

Αν $P(x) = 3x(-2x + 4)(x-1)$, $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta x$, $\Pi(x) = (x^2 - 4)(x - 1)$

α) Να βρείτε τις τιμές των α , β , γ , δ έτσι ώστε να ισχύει $P(x) = Q(x)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = \Pi(x)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} P(x) = 3x(-2x + 4)(x-1) &= 3x(-2x^2 + 2x + 4x - 4) = \\ &= -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x = \\ &= -6x^3 + 18x^2 - 12x \end{aligned}$$

$P(x) = Q(x)$ άρα $\alpha = -6$ και $\beta = 18$ και $\gamma = -12$ και $\delta = 0$

β)

$P(x) = \Pi(x)$ άρα

$$\begin{aligned} &3x(-2x + 4)(x-1) = (x^2 - 4)(x - 1) \\ &3x(-2x + 4)(x-1) - (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \\ &3x(-2)(x - 2)(x-1) - (x-2)(x + 2)(x - 1) = 0 \\ &(x - 2)(x-1)[-6x - (x + 2)] = 0 \\ &(x - 2)(x-1)(-6x - x - 2) = 0 \\ &(x - 2)(x-1)(-7x - 2) = 0 \\ &x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad -7x - 2 = 0 \\ &x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

10.

i) Από τους αριθμούς $\alpha = \sqrt{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 2\sqrt{2}$, $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\zeta = \sqrt{\frac{2}{4}}$

να βρείτε ποιοι είναι ίσοι.

ii) Ομοίως από τους $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{12}$,

$\delta = \sqrt{3+3}$, $\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha = \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\gamma = 2\sqrt{2}$

$\delta = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\zeta = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\alpha = \gamma = \delta$ και $\beta = \varepsilon = \zeta$

ii)

$\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\beta = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 \cdot 3 = 6$

$\gamma = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\delta = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$

$\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 9} - \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Άρα $\alpha = \gamma = \varepsilon$